Лекция 7_ Шварцшильд есебіндегі векторлық элементтерге қатысты тұрақтылық

Бұл дәрісте, Шварцшильд есебінде орбитаның векторлық элементтеріне қатысты тұрақтылық мәселесін қарастырамыз. Ол үшін Кеплер есебіндегі $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтер сақталғанын еске түсіреміз, яғни мына шартты қанағаттандыруы қажет

$$\vec{M} = \text{const}, \quad \vec{A} = \text{const}. \qquad (1)$$

Мұны Кеплер есебі жағдайында векторлық элементтерге қатысты барлық классикалық (эллиптикалық, параболалық және гиперболалық) орбиталардың орнықтылығынығ бірегей шарты ретінде қарастыруға болады.

(2.7)-ден көрініп тұрғандай, Шварцшильд мәселесі жағдайында бұл шарт орындалмайды, яғни орталық дененің өрісінде қозғалатын сынақ денесінің орбиталары, жалпы жағдайда, орнықсыз сияқты - векторлық элементтерге қатысты орнықсыздыққа айналады. Дегенмен, (1) шарты орындалатын орбиталардың белгілі бір аз ғана класы бар, яғни векторлық орбиталық элементтерге қатысты тұрақты. Оларды анықтау үшін (2.7) қозғалыс теңдеулері (1) шартын қанағаттандыруын орындаймыз. Содан кейін ғана біз шешімді ала аламыз

$$\vec{M} = \text{const}, \quad \vec{A} = 0. \qquad (2.30)$$

Это означает, что в случае задачи Шварцшильда в механике ОТО существует класс устойчивых по отношению к векторным элементам орбит – это класс круговых орбит.

2.5 Устойчивость по отношению к векторным элементам орбиты в задаче Лензе-Тирринга

Теперь рассмотрим устойчивость по отношению к векторным элементам орбиты в задаче Лензе-Тирринга. При рассмотрении орбитальной устойчивости в задаче Лензе-Тирринга мы выяснили, что абсолютные значения векторов $\vec{M}$ и $\vec{A}$ остаются постоянными. Что же касается направлений векторов $\vec{M}$ и $\vec{A}$, то они изменяются со временем. Вектора $\vec{M}$ и $\vec{A}$ участвуют во вращательном движении с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Так что движение пробного тела в поле вращающегося тела устойчиво, вообще говоря, по отношению к углу наклонения i и неустойчиво по отношению к долготе восходящего узла δ и угловому расстоянию перигелия от входящего узла σ.

Однако, существуют орбиты, для которых сохраняется векторный элемент $\vec{M}$, т.е. они устойчивы по отношению к этому векторному элементу (т.е. в отношении ориентации орбиты в пространстве). Для их определения достаточно ввести в виде (2.29) условие

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0. \qquad (2.30)$$

Тогда имеем

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0,\ \vec{M} = \mathrm{const}. \qquad (2.31)$$

Каковы сами орбиты? Для ответа на этот вопрос подставим выражение для $\vec{\Omega}$ (2.21) в условие устойчивости (2.30), тогда получим соотношение

$$\left[\vec{M} \cdot \left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0\right\}\right] = 0. \qquad (2.32)$$

Это соотношение выполняется:

1. Когда $\vec{M} = 0$, т.е. когда орбита вырождается в прямые линии, проходящие через центр.

2. Когда $\vec{S}_0 = 0$, т.е. задача вырождается в задачу Шварцшильда, т.е. в задачу о движении пробного тела в центрально-симметричном поле. Для этой задачи

$$\vec{M} = \mathrm{const},\quad \vec{A} \neq \mathrm{const}. \qquad (2.33)$$

3. Когда выполняется условие

$$14m_0M^2 = 3m(\vec{M}\vec{S}_0)\,. \qquad (2.34)$$

или через косинус угла между $\vec{M}$ и $\vec{S}_0$

$$\cos\ \alpha_{\vec{M}\vec{S}_0} = \frac{14m_0M}{3mS_0}\,. \qquad (2.35)$$

Выполнение этого условия возможно в поле экзотических астрофизических объектов с очень большим собственным угловым моментом (например, быстро вращающаяся нейтронная звезда, и т.п.) порядка

$$S_0 \sim \frac{m_0}{m}M\,. \qquad (2.36)$$

4. Когда $\vec{S}_0 \uparrow\uparrow \vec{M}$ или $\vec{S}_0 \uparrow\downarrow \vec{M}$, т.е. класс круговых орбит, лежащих в экваториальной плоскости центрального вращающегося тела.

Эта задача при перечисленных условиях допускает устойчивость движения пробного тела по отношению к векторному элементу $\vec{M}$, но, вообще говоря, не допускает устойчивости по отношению к векторному элементу $\vec{A}$.

Напомним, что кеплерова задача допускает устойчивость движения материальной частицы по отношению к обоим векторным элементам:

$$\vec{M} = \mathrm{const},\ \ \vec{A} = \mathrm{const}\,. \qquad (2.37)$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что для задачи Кеплера $\vec{M} = \mathrm{const}$, $\vec{A} = \mathrm{const}$; для задачи Шварцшильда $\vec{M} = \mathrm{const}$, $\vec{A} \neq \mathrm{const}$, а для исследуемой нами здесь задачи Лензе-Тирринга, вообще говоря, $\vec{M} \neq \mathrm{const}$, $\vec{A} \neq \mathrm{const}$.

Теперь выясним, как эти обстоятельства отражаются в гамильтониане. Для задачи Кеплера гамильтониан

$$H = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2}\,. \qquad (2.38)$$

Обратим внимание, что этот гамильтониан не зависит ни от векторного элемента $\vec{M}$, ни от векторного элемента $\vec{A}$, а зависит от инварианта системы M_0 (или другими словами от энергии E).

Поскольку большая полуось [14]

$$a = \frac{M_0^2}{m\alpha} \tag{2.39}$$

то (2.38) приобретает вид

$$H = mc^2 - \frac{\alpha^2}{2a} = mc^2 + E \tag{2.40}$$

Гамильтониан задачи Шварцшильда

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{15m\alpha^4}{8M_0^2c^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3Mc^2} \tag{2.41}$$

Этот гамильтониан зависит от абсолютного значения векторного элемента $\vec{M}$. Если $\vec{M}$ рассматривается как обобщенный импульс, то соответствующий ему угловой элемент g удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{g}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}} = \vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M_0^3Mc^2}\vec{M}\,. \tag{2.42}$$

Отсюда, если переходить к кеплеровым элементам, имеем

$$\vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0}{Ta(1-e^2)c^2}\vec{e}_M\,, \tag{2.43}$$

$$\Delta g = \Omega \cdot T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}\,. \tag{2.44}$$

Итак, в классической механике, в задаче Кеплера, все орбиты устойчивы (относительно векторных элементов) и условиями устойчивости являются (2.37). Спрашивается, существуют ли такие же устойчивые, т.е. удовлетворяющие условиям (2.37) орбиты в задаче Лензе-Тирринга. Для определения таких орбит в (2.18), (2.19) потребуем, чтобы было

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \tag{2.45}$$

или что то же самое

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0\,, \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] = 0\,. \tag{2.46}$$

Здесь

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3M_0^3c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0M^3M_0^3c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0M^4}\vec{M}\right\} -$$
$$- \frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0M^5M_0^3c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\} \tag{2.47}$$

Это и есть условия устойчивости релятивистских орбит относительно векторных элементов. Они могут быть выполнены, если

$$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{M}, \quad A = 0\,, \tag{2.48}$$

или

$$\vec{\Omega}\uparrow\downarrow\vec{M},\quad A=0. \tag{2.49}$$

или

$$1+\frac{2m^2(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0^2M^4}-\frac{m}{m_0M^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0)+\frac{m}{7m_0}S_0^2-\frac{3m}{7m_0M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\}=0;$$

$$A=0;$$

(2.50)

Последнее условие может быт переписано таким образом

$$B(\vec{M}\vec{S}_0)^2+C(\vec{M}\vec{S}_0)+D=0,$$

$$A=0;$$

(2.51)

где

$$B=\frac{5m^2}{7m_0^2M^4};C=-\frac{2m}{m_0M^2};D=1-\frac{m^2S_0^2}{7m_0^2M^2}. \tag{2.52}$$

если разрешить (2.47) относительно $(\vec{M}\vec{S}_0)$, получим

$$(\vec{M}\vec{S}_0)=\frac{7m_0M^2}{5m}\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{7}+\frac{5m^2S_0^2}{49m_0^2M^2}}\right);$$

$$A=0;$$

(2.53)

или через косинус угла между $\vec{M}$ и $\vec{S}_0$

$$\cos\,\alpha_{\vec{M}\vec{S}_0}=\frac{7m_0M}{5mS_0}\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{7}+\frac{5m^2S_0^2}{49m_0^2M^2}}\right).$$

$$A=0;$$

(2.54)

Это условие, так же как и (2.35), возможно в поле экзотических астрофизических объектов при выполнении соотношения (2.36).

Таким образом, основными устойчивыми орбитами по отношению к векторным элементам $\vec{M}$ и $\vec{A}$ в задаче Лензе-Тирринга являются класс круговых орбит, лежащих в экваториальной плоскости центрального вращающегося тела.

В заключение заметим, что условие устойчивости (2.34) учитывает векторные элементы только поступательного движения. Мы можем ожесточить это условие. Действительно, для кеплеровой задачи, строго говоря, имеется следующее условие

$$\vec{M}=\mathrm{const},\ \ \vec{A}=\mathrm{const},\ \ \vec{\omega}=0, \qquad (2.55)$$

где $\vec{\omega}$– собственная угловая скорость.

Тогда в случае задачи Шварцшильда этому условию устойчивости могут удовлетворять только орбиты, выродившиеся в прямые линии, лежащие в радиальном направлении. Условие (2.55) приобретает вид

$$\vec{M}=0,\ \ \vec{A}=\mathrm{const},\ \ \vec{\omega}=0 \qquad (2.56)$$